УДК 681.511

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОГРАММНОЕ ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

THE OPTIMAL OPEN-LOOP TEMONAL CONTROL FOR SPACECRAFT RENDEZVOUS PROBLEM

Горанов Александр Юрьевич, аспирант каф. «Прикладная математика», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: goranovayu@mail.ru, Тел.: +7(902)509-45-04

Aleksandr Yu. Goranov, postgraduate student, Department «Applied mathematics», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: goranovayu@mail.ru. Ph.: +7(902)509-45-04

Аннотация: В работе предлагается способ решения задачи оптимального программного терминального управления сближением двух космических аппаратов. В качестве исходной модели выбирается нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая динамику относительного движения в центральном поле тяготения Земли. Исходная система заменяется ее линейной рекуррентной аппроксимацией, после чего с использованием аппарата построения прямых и обратных областей достижимости решается задача оптимального программного терминального управления.

Abstract: The paper proposes a method for solving of optimal terminal open-loop control problem of spacecraft rendezvous. The initial model is a nonlinear differential equations which describes the relative motion dynamics in the central gravitational field of the Earth. The original system is replaced by its linear recurrence approximation, and then using the functions of constructing forward and backward reachable sets, the optimal terminal open-loop control problem is solved.

Ключевые слова: программное оптимальное управление, управление сближением космических аппаратов, области достижимости, выпуклые многогранники.

Key words: optimal open-loop control, spacecraft rendezvous, reachable sets, convex polyhedron.

ВВЕДЕНИЕ

Задача управления сближением космических аппаратов (КА) на околоземной орбите или орбите другого небесного тела представляет собой одну из важнейших и сложных научно-технических проблем в ракетно-космической технике. Начиная с 60-х годов решение данной задачи получило огромное внимание (см. [1], [2]). Так, например, с точки зрения математического описания управляемого движения КА задачи оптимизации условно делятся на детерминированные, стохастические и игровые.

Детерминированному подходу отвечает математическая модель, для которой существует однозначная связь между параметрами системы и временем. В стохастических моделях связь между параметрами движения и временем известна приближенно и задается через некоторое распределение вероятности. В игровых подходах отражается круг ситуаций, когда процесс протекает в условиях конфликта или неопределенности.

В данной статье описывается применение детерминированного подхода к решению задачи оптимального терминального управления движением, основанного на работе [4], где считается, что неопределенные параметры системы принимают свои значения из некоторого известного ограниченного и замкнутого множества. В представленной работе в качестве исходной модели рассматривается модель движение двух материальных точек в центральном полет тяготении Земли. Указанная модель линеаризуется относительно опорной траектории (орбиты одного из КА), а затем приводится к линейному рекуррентному виду. Для сформированной линейной дискретной динамической модели с помощью алгоритма описанного в работе [4] производится решение задачи поиска оптимального программного терминального управления. В заключительной части с использованием разработанного автором программного модуля проиллюстрированы результаты численного моделирования.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается модель относительного движения двух материальной точек в центральном поле тяготении Земли. Считается, что один из объектов имеет пассивный характер движения, в то время как другой может корректировать свою динамику за счёт создания управляющего ускорения.

$$\frac{d^2\mathbf{r}_\text{п}}{dt^2} + \frac{\mu}{r_\text{п}^3}\mathbf{r}_\text{п} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_\text{а}}{dt^2} + \frac{\mu}{r_\text{а}^3}\mathbf{r}_\text{а} = \mathbf{a}_\text{а}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, соединяющий материальную точку (центр масс) с центром масс Земли (нижний индекс А обозначает активный КА, а П – пассивный КА); μ – гравитационный параметр Земли, равный произведению гравитационной постоянной на массу Земли; $\mathbf{a}$ – вектор возмущающего ускорения активного КА, развиваемого двигательной установкой.

Производится переход к относительному движению КА, для этого необходимо из уравнения (2) вычесть уравнение (1)

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_\text{п} - \mathbf{r}_\text{ц}) + \mu\left(\frac{\mathbf{r}_\text{ц}}{r_\text{ц}^3} - \frac{\mathbf{r}_\text{п}}{r_\text{п}^3}\right) = \mathbf{a}_\text{п}.$$

Для удобства дальнейшей записи вводится вектор относительной дальности

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_\text{п} - \mathbf{r}_\text{ц}.$$

Тогда

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{D} - \mu\left(\frac{\mathbf{r}_\text{п}}{r_\text{п}^3} - \frac{\mathbf{r}_\text{ц}}{r_\text{ц}^3}\right) = \mathbf{a}_\text{п}.$$

Произведя преобразования выражения (4) с помощью (3), можно перейти к уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{D} - \mu\left(\mathbf{r}_\text{ц} - (\mathbf{r}_\text{ц} + \mathbf{D})\left(1 + \frac{D^2}{r_\text{ц}^2} + 2\frac{r_\text{ц}D}{r_\text{ц}^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = \mathbf{a}_\text{п}. \quad (3)$$

Данное уравнение является нелинейным, что сильно затрудняет его использование. Поэтому на практики часто производят его линеаризацию, при условии что $D / r_\text{ц} = 1$, и переходят к рассмотрению системы уравнений Клохесси-Уилтшира, которая в случае круговой орбиты имеет следующий вид

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y}\omega_\text{ц} = a_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x}\omega_\text{ц} - 3\omega_\text{ц}^2 y = a_y, \\ \ddot{z} + z\omega_\text{ц}^2 = a_z. \end{cases} \qquad (4)$$

здесь x, y, z – проекции вектора относительной дальности активно космического аппарата; $\omega_\text{ц}$ – угловая скорость вращения пассивного аппарата вокруг Земли; a_x, a_y, a_z – проекции ускорения, развиваемого двигательной установкой.

На следующем этапе преобразования системы (3) производится ее дискретизация. Делается это в силу того, что процесс дискретизации является естественным этапом при реализации алгоритма управления на бортовом вычислительном устройстве. Подробно процесс и методика дискретизации можно посмотреть в работе [3].

Тогда рассматривается линейная рекуррентная аппроксимации системы (3), которая на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$ имеет следующий вид:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \overline{0,T-1} \qquad (5)$$

где $x(t)$ – вектор фазового состояния, $x(t) \in \mathbf{R}^6$ ($\mathbf{R}^n$ – евклидово пространство вектор-столбцов); $u(t)$ – вектор управления, $u(t) \in \mathbf{R}^3$; $A(t)$ – матрица состояния системы, $A(t) \in \mathbf{R}^{6\times6}$; $B(t)$ – матрица управления, $B(t) \in \mathbf{R}^{6\times3}$. Предполагается, что $\forall t \in \overline{0,T-1} : \det(A(t)) \neq 0$, $T \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел).

Предполагается, что выполняются нижеследующие условия.

Условие 1. Фазовый вектор динамических систем (5) удовлетворяет заданному геометрическому ограничению, имеющему вид выпуклого, замкнутого и ограниченного многогранника с конечным числом вершин:

$$x(t) \in \mathbf{X}_1(t) \subset \mathbf{R}^6 \qquad (6)$$

Условие 2. Вектор управления динамической системы (5) удовлетворяет заданному геометрическому ограничению, которое имеет вид выпуклого, замкнутого и ограниченного многогранника с конечным числом вершин:

$$u(t) \in \mathbf{U}_1(t) \subset \mathbf{R}^3 \ \forall t \in \overline{0,T-1}. \qquad (7)$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для дальнейших рассуждений вводятся следующие определения.

Определение 1. Множеством допустимых программных управлений для фиксированного интервала времени $\overline{\tau,T} \subseteq \overline{0,T}$ $(\tau < T)$ и ограничения (7) называется множество

$$\mathbf{U}\left(\overline{\tau,T}\right) = \left\{u(\cdot) : \{u(\cdot)\} \in \overline{\tau,T-1} \times \text{Ў}^2,\right.$$
$$\left. u(t) \in \mathbf{U}_1(t)\ \forall t \in \overline{\tau,T-1}\right\}.$$

Определение 2. Множество всех допустимых положений динамической системы (5) – (7) называется множество

$$\mathbf{W}(\tau) = \left\{w(\tau) : w(\tau) = \{\tau, x(\tau)\} \in \overline{0,T} \times \mathbf{X}(\tau)\right\},$$

где $w(\tau)$ – позиция динамической системы в дискретный момент времени τ; исходное множество $\mathbf{W}(0) = \{w(0)\} = \{0, x(0)\}$.

Точность сближения космических аппаратов оценивается значениями отклонений кинематических параметров активного и пассивного, поэтому для каждой допустимой пары

$$\left(w(\tau), u(\cdot)\right) \in \text{Ў}^6 \times \text{Ў}^{3\times(T-\tau)},\ w(\tau) \in \mathbf{W}(\tau),$$

где

$$u(\cdot) = \{u(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}} \in \text{Ў}^{3\times(T-1)},\ u(t) \in \mathbf{U}(t)\ \forall t \in \overline{0,T-1},$$

качество процесса управления в системе (4) – (6) будет определяться функционалом $J : \text{Ў}^6 \to \text{Ў}^1$:

$$J = J\left(w(t), u(\cdot)\right) = \left\langle x(T), Qx(T)\right\rangle = J(x(T)), \quad (8)$$

где Q – положительно определенная матрица весовых коэффициентов, $Q \in \text{Ў}^{6\times6}$; $\langle\cdot\rangle$ – скалярное произведение векторов.

Считается, что на промежутке времени $\overline{\tau,T} \subseteq \overline{0,T}$ интересен такой результат процесса управления, полученный путем выбора допустимых программных управлений $u(\cdot) \in \mathbf{U}\left(\overline{\tau,T}\right)$, при котором терминальный функционал (8) принимал бы наименьшее значение.

Основываясь на вышесказанном, перейдем к формулировке задачи оптимального программного терминального управления.

Задача. Для дискретной динамической системы (5) – (7) требуется найти такое множество допустимых программных оптимальных управлений

$$\mathbf{U}^{(e)}\left(\overline{\tau,T}, w(\tau)\right) \subseteq \mathbf{U}\left(\overline{\tau,T}\right),$$

$$\mathbf{U}^{(e)}(\cdot) = \left\{u^{(e)}(\cdot)\right\} \in \overline{\boldsymbol{\tau},T-1} \times \text{Ў}^2,\ u^{(e)}(t) \in \mathbf{U}(t)\ \forall t \in \overline{\boldsymbol{\tau},T-1},$$

чтобы для соответствующей траектории

$$x^{(e)}(\cdot) = \left\{x^{(e)}(t)\right\}_{t\in\overline{\tau,T}} = \left\{\overline{x}\left(t; \overline{\boldsymbol{\tau},T}, x(\boldsymbol{\tau}), u^{(e)}(\cdot)\right)\right\}_{t\in\overline{0,T}},$$

критерий качества принимал бы наименьшее значение

$$J^{(e)} = J\left(x^{(e)}(\tau), u^{(e)}(\cdot)\right) = \min_{\substack{x(\tau)\in\mathbf{X}(\tau)\\ u(\cdot)\in\mathbf{U}(\cdot)}} \left\| q, \overline{x}\left(T; \overline{\tau,T}, x(\tau), u(\cdot)\right)\right\|_4,$$

где $x(T) = \overline{x}\left(T; \overline{\tau,T}, x(\tau), u(\cdot)\right)$ – движение управляемой системы, порожденное из положения $w(\tau) = (\tau, x(\tau)) \in \overline{\tau,T-1} \times \mathbf{R}^6$ посредством управления $u(\cdot) \in \mathbf{U}(\cdot)$, соответствующей допустимой паре $\left(w(\tau), u(\cdot)\right) \in \mathbf{W}(\tau) \times \mathbf{U}(\cdot)$.

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Используя приведенные определения и результаты работы [4], решение задачи поиска оптимального программного терминального управления можно записать следующим образом:

1. Вычисление последовательности прямых областей достижимости $\mathbf{G}_+\left(\tau, x(\tau); t\right)$, $t \in \overline{\tau,T} \subseteq \overline{0,T}$.

2. Оптимизация выпуклого функционала (8) на конечном множестве $\mathbf{G}_+\left(\tau, x(\tau); T\right)$, то есть нахождение множества конечных состояний системы (5) – (7) из решения задачи выпуклого математического программирования

$$\mathbf{X}^{(e)}(\tau, x(\tau); T) = \left\{x^{(e)}(T) : x^{(e)}(T) \in \mathbf{G}_+\left(\tau, x(\tau); T\right),\right.$$
$$\left. J\left(x^{(e)}(T)\right) = \min_{x(T)\in\mathbf{G}_+\left(\tau, \mathbf{X}(\tau); T\right)} \left\langle x^{(e)}(T), Qx^{(e)}(T)\right\rangle\right\}.$$

3. Вычисление последовательности обратных областей достижимости

$$\mathbf{G}_-\left(T, \mathbf{X}^{(e)}(T); t\right),\ t \in \overline{\tau,T} = \{T, T-1, \ldots, \tau\},$$
$$x^{(e)} \in \mathbf{X}^{(e)}(T);$$

4. Построение множеств пересечений обратных и прямых областей достижимости

$$\mathbf{G}^{(e)} = \mathbf{G}_{+}\left(\tau, x(\tau); t\right) \cap \mathbf{G}_{-}\left(T, \mathbf{X}^{(e)}(T); t\right),\ t \in \overline{1, T-1},$$

5. Поиск конечного множества пар, определяющих множество оптимальных программных терминальных управлений

$$\mathbf{U}^{(e)}\left(\overline{\tau, T}, x(\tau), \mathbf{X}^{e}(T)\right) = \Big\{u^{(e)}(\cdot):\ u^{(e)}(t) \in \mathbf{U}(t)$$
$$x^{(e)}(t+1) = A(t)x^{(e)}(t) + B(t)u^{(e)}(t),$$
$$x^{(e)}(\tau) = x(\tau)\ \forall t \in \overline{\tau, T-1}\Big\}.$$

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Эффективность предложенного метода продемонстрируем на следующем численном примере, где нелинейной дифференциальной управляемой динамической системе (3) ставится в соответствие ее дискретная аппроксимация (5) – (7).

Как видно из системы уравнений (4), боковое движение является независимым от движения в плоскости орбиты, что дает основание рассматривать только первые два уравнения системы. В этом случае матрицы $A(t)$ и $B(t)$ при угловой скорости $\omega_{ц} = 10^{-3}\ рад^{-1}$, ускорении, развиваемом двигательной установкой преследователя $a_x = a_y = 0.2\ м/с$, и шаге дискретизации $T_0 = 10\ сек$ будут иметь следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 0.112 \\ 0 & 1 & -0.112 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0.022 \\ 0 & 0 & -0.022 & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0.075 \\ -0.075 & 10 \\ 2 & 0.022 \\ 0.022 & 2 \end{bmatrix}$$

Предполагается, что управляющее воздействие $u(t)$ принимает свои значения из заданного множества $\mathbf{P}(t) = \left\{\ |u_i(t)| \le 1, i = \{1,2\}\right\}$, $\forall t \in \overline{0, T-1}$, радиус-вектор цели равен: $r_{ц} = 42.24 \cdot 10^{6}\ (м)$, а начальные значения фазового вектора $x_1(0) = 3700\ м$, $x_2(0) = 3497\ м$, $x_3(0) = 0\ м/с$, $x_4(0) = 0\ м/с$. Тогда проекции фазовых траекторий движения систем (3) и (5) - (7) будут иметь следующий вид (см. рис. 1).

Из представленных результатов численного моделирования, видно, что результат программного управления нелинейной системой (3) уступает в качестве процессу управления ее линейной дискретной аппроксимацией. Однако, значения относительных параметров движения КА достаточно малы, что позволяет сделать следующие выводы: указанный алгоритм является эффективным средством при решении задач поиска оптимального программного управления; для улучшения качества управления нелинейной непрерывной моделью возникает необходимость в дальнейшем синтезе алгоритма коррекции программного оптимального терминального управления.

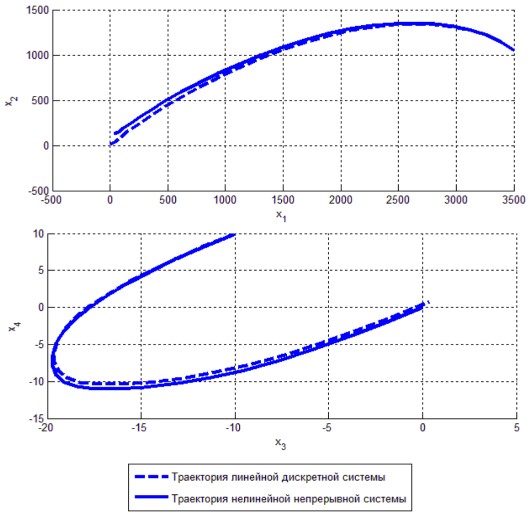

Рис. 1. Проекции фазовых траекторий линейной и нелинейно систем

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен метод поиска оптимального программного терминального управления сближением КА. В качестве исходной модели выбрана модель относительного движения двух материальных точек в центральном полет тяготении Земли. Указанная модель была приведена к линейному рекуррентному виду, где для сформированной линейной дискретной динамической модели с помощью алгоритма описанного в работе [4] произведено решение задачи управления исходной нелинейной непрерывной моделью.

Данный метод показал свою эффективность, что было продемонстрировано на численном примере в программном пакете MATLAB 8.4 (R2014a), где автором был разработан программный модуль для решения задачи сближения КА. Результат данной работы является промежуточным, поэтому на следующем этапе для повышения качества результата управления исходной нелинейной непрерывной моделью необходимо использовать алгоритм коррекции программного управления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ермилов Ю.А. Управление сближением космических аппаратов / Ю.А. Ермилов, Е.Е. Иванова, С.В. Пантюшин. – М.: Наука, 1977. 448 с.
2. Иванов Н.М., Методы теории систем в задачах управления космическим аппаратом / Н.М. Иванов, Л.Н. Лысенко, А.И. Мартынов. – М.: Машиностроение, 1981. 254 с.
3. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973. 440 с.
4. Шориков А. Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. 242 с.